

Semaine 04 : du 02 au 06 octobre 2017

Semaine 05 : du 09 au 13 octobre 2017

Révisions d'algèbre du programme de première année

Polynômes (à coefficients réels ou complexes).

Algèbre linéaire : Espaces vectoriels et applications linéaires

Espaces vectoriels de dimension finie

Matrices

Compléments d'algèbre linéaire (programme de deuxième année)

Familles quelconques de vecteurs : familles libres, génératrices, bases.

Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe.

Hyperplans (définis comme supplémentaires de droites vectorielles).

Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel : homothéties, projecteurs et symétries.

Sous-espaces stables par un endomorphisme, endomorphisme induit. Matrice dans une base adaptée.

Matrices semblables.

Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.

Matrices symétriques, matrices antisymétriques.

Déterminants

Déterminant d'une matrice carrée. Propriétés usuelles (dont le développement suivant une rangée).

Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme en dimension finie.

Notes.

- Peu d'exercices ont été faits sur les matrices semblables. Notamment, nous n'avons pas encore vu comment démontrer qu'une matrice est semblable à une matrice triangulaire donnée. Ceci sera vu dans le chapitre sur la réduction.
- Il serait bon d'interroger au moins une fois sur les sommes directes de plusieurs sous-espaces.

On trouvera le programme officiel de deuxième année au dos de la feuille.

Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A - Compléments d'algèbre linéaire

Ce chapitre est organisé autour de trois objectifs :

- consolider les acquis de la classe de première année.
- étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, projecteurs, hyperplans, sous-espaces stables, trace.
- passer du point de vue géométrique au point de vue matriciel et inversement.

Le programme valorise les interprétations géométriques en dimensions 2 et 3 et l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Familles quelconques de vecteurs	
Famille libre, famille génératrice, base. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre.	Extension des résultats vus en première année sur les familles finies de vecteurs. Toute famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\deg(P_k) = k$ pour tout k est une base de $\mathbb{K}[X]$.
b) Sous-espaces vectoriels	
Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe. En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe.	Par définition, la somme F de p sous-espaces F_i est directe si tout vecteur de F se décompose de manière unique selon les F_i . Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Pour $p \geq 3$, toute autre caractérisation est hors programme.
Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie, défini comme sous-espace admettant une droite comme supplémentaire. Équations d'un hyperplan. Équations d'un sous-espace vectoriel : si E est de dimension n , l'intersection de p hyperplans est de dimension au moins $n - p$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans.	Interprétation géométrique de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires.
c) Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel	
Homothétie. Projecteur et symétrie associés à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Caractérisations $p \circ p = p$ et $s \circ s = \text{Id}_E$. Famille de projecteurs associés à une décomposition en somme directe. Propriété : $p_i \circ p_j = 0$, $p_1 + \dots + p_m = \text{Id}_E$.	L'obtention de la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(p_i)$ à partir de cette propriété est hors programme.
d) Sous-espaces stables	
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. Matrice dans une base adaptée.	Les étudiants doivent savoir interpréter une forme matricielle par blocs en termes de stabilité d'un sous-espace et, inversement, traduire cette stabilité sous forme matricielle.
e) Matrices	
Matrices semblables. Trace d'une matrice carrée. Linéarité, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.	Interprétation en termes d'endomorphismes.

B - Déterminants

Les déterminants, introduits en première année dans le cadre de la géométrie du plan ou de l'espace, sont généralisés à la dimension n et aux cadres matriciel et vectoriel. Les capacités attendues sont la connaissance et l'utilisation des propriétés du déterminant permettant un calcul simple via des opérations élémentaires. Tout excès de technicité est exclu et l'outil informatique est utilisé dès que le calcul s'avère trop lourd. Le vocabulaire des formes multilinéaires alternées, le groupe symétrique et les formules de Cramer sont hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Déterminant d'une matrice carrée	
Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que : <i>i.</i> le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ; <i>ii.</i> l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ; <i>iii.</i> le déterminant de la matrice unité I_n vaut 1.	Notation $\det$. La démonstration de ce théorème pour $n \geq 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. Pour $n \in \{2, 3\}$, on interprète géométriquement cette définition par les notions d'aire et de volume algébriques.
b) Propriétés du déterminant	
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul. Expression de $\det(\lambda A)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Effet sur un déterminant des opérations élémentaires en colonnes. Déterminant d'une matrice triangulaire. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Déterminant d'un produit de matrices carrées. Déterminant de l'inverse. Déterminant de la transposée.	$\Leftrightarrow$ I : calcul du déterminant d'une matrice. Démonstration hors programme. Démonstration hors programme. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes. Démonstration non exigible. La notion de comatrice est hors programme.
c) Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.	La formule de changement de base pour un déterminant est hors programme. Traduction sur le déterminant d'un endomorphisme des propriétés relatives au déterminant d'une matrice.