PT	Programme de colles	2017/2018

Semaine 06 : du 16 au 20 octobre 2017
Semaine 07 : du 06 au 10 novembre 2017

1) Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles

Topologie

Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
Partie bornée.
Boule ouverte, boule fermée.
Voisinage d'un point. Partie ouverte, partie fermée.
Point intérieur, point adhérent, point extérieur, point de la frontière.

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles

Fonctions bornées.
Limite, continuité. Comparaison locale.
Dérivabilité, classe $\mathscr{C}^k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).
Caractérisation de chacune des notions à l'aide des fonctions coordonnées.
Dérivée de « produits » (produit scalaire, vectoriel, déterminant, ...).
Formule de Leibnitz pour un « produit » de deux fonctions.
Développements limités, formule de Taylor-Young.

Note. La notion de courbe paramétrée n'a pas encore été vue.

2) Fonctions de deux ou trois variables réelles, à valeurs réelles ou vectorielles

Limite, continuité.
Toute fonction réelle continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes.
Dérivées partielles *(attention : la différentielle et la matrice jacobienne ne sont plus au programme)*.
Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, $k \in \{0,1,2\}$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Théorème de Schwarz pour une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.
Dérivées partielles d'applications composées.
Résolution d'équations aux dérivées partielles à l'aide de changements de variables.

Notes.

- *Les extrema des fonctions à valeurs réelles seront vus ultérieurement, l'étude locale devant dorénavant se faire par réduction de la matrice hessienne dans le groupe orthogonal.*
- À propos de la notion de $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, j'ai donné la définition, rien de plus.
  Les élèves peuvent utiliser cette notion lors de la résolution d'une EDP.
- Les problèmes de calcul de limite en un point ne sont pas un objectif du programme.
  On pourra donner un calcul de limite ou demander de vérifier qu'un prolongement par continuité est $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$, mais seulement en deuxième exercice.

Consignes pour la colle.

- Le premier exercice portera sur les fonctions de plusieurs variables, et permettra de vérifier la maîtrise du calcul des dérivées partielles (cela pourra être, par exemple mais pas nécessairement, une EDP d'ordre 1 ou 2).
- On évitera de donner un exercice de topologie, ce n'est pas dans l'esprit du programme. On peut par contre donner un ensemble de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, et demander à l'élève si cet ensemble est ouvert ou fermé (en exigeant la définition, mais en acceptant une simple vérification graphique).

Fonctions vectorielles d’une variable réelle

Contenus	Capacités et commentaires
a) Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	
Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.	Interprétation de la norme en termes de distance.
Boule ouverte, boule fermée.	
Parties ouvertes, parties fermées, parties bornées.	Toutes les définitions sont illustrées par des figures.
Point intérieur, point extérieur, point adhérent à une partie. Frontière.	Les points de la frontière de A sont les points x tels que toute boule ouverte centrée en x rencontre à la fois A et son complémentaire.
b) Fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$	
Limite en un point. Continuité en un point. Continuité globale.	Caractérisation par les fonctions coordonnées.
Vecteur dérivé à droite et à gauche en un point.	Caractérisation par les fonctions coordonnées.
Fonction dérivée.	
Dérivée d’une combinaison linéaire, d’une composée, d’un produit.	La dérivée du produit s’applique au produit d’une fonction numérique par une fonction vectorielle, au produit scalaire de deux fonctions vectorielles et au produit vectoriel de deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^k$.	
Dérivées successives d’une combinaison linéaire, d’un produit (formule de Leibniz).	
Formule de Taylor-Young.	Développement limité d’une fonction de classe $\mathscr{C}^k$.
Interprétation cinématique.	⇆ PC,SI : vecteurs vitesse et accélération.

Fonctions de deux ou trois variables

L’étude des fonctions de plusieurs variables est tournée vers les applications : résolution sur des exemples d’équations aux dérivées partielles, problèmes d’extremums, intégrales dépendant d’un paramètre.
On se limite aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \leqslant 3$.
La notion de différentielle n’est pas au programme, mais sa notation y figure pour faire le lien avec l’enseignement de Physique-Chimie.
L’interprétation géométrique de certains concepts et leur illustration par des figures dans le cas où $p = 2$ et $n \leqslant 2$ concourent à développer la compétence « Représenter ».
Par les différentes notations introduites dans ce chapitre et la technicité nécessitée par leur manipulation, celui-ci contribue également à la mise en œuvre de la compétence « Calculer ».

A - Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ ($p = 2$ ou 3)

Contenus	Capacités et commentaires
a) Limite et continuité	
Limite en un point adhérent.	
Continuité en un point. Continuité sur une partie.	
Opérations sur les fonctions continues.	Les problèmes de prolongement par continuité ne sont pas un objectif du programme.
Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$ est bornée et atteint ses bornes.	Démonstration hors programme.
b) Dérivées partielles	
Dérivées partielles d’ordre 1 en un point intérieur.	Notations $\partial_i f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
Gradient.	⇆ PC : notation ∇f.
Point critique.	
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.	
Formule de Taylor-Young à l’ordre 1 pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Démonstration hors programme. ⇆ PC : notation $\mathrm{d}f = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$. La définition de la différentielle est hors programme.
Dérivée de $t \mapsto f\big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big)$.	
Dérivées partielles d’ordre 2 en un point intérieur.	Notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $\partial_1\partial_2 f(a)$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert.	
Théorème de Schwarz.	Démonstration hors programme.

B - Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ ($p \leqslant 3$, $n \leqslant 3$)

Contenus	Capacités et commentaires
a) Limite et continuité	
Limite en un point adhérent. Continuité en un point. Continuité sur une partie de $\mathbb{R}^p$.	Caractérisation par les fonctions coordonnées.
b) Dérivées partielles	
Dérivées partielles d’ordres 1 et 2. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, de classe $\mathscr{C}^2$.	Expression coordonnée par coordonnée.
Calcul des dérivées partielles d’ordres 1 et 2 de $(u, v) \mapsto f\big(x(u, v), y(u, v)\big)$.	Utilisation de la dérivée de $t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$. Cas particulier du passage en polaire.
Exemples de résolution d’équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.	Les étudiants doivent être capables d’utiliser un changement de variables fourni par l’énoncé. L’expression des solutions en fonction des variables initiales n’est pas un attendu. ⇆ PC : équation du transport, équation de la diffusion thermique, équation de propagation.