Semaine 08 : du 13 au 17 novembre 2017

Semaine 09 : du 20 au 24 novembre 2017

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Réduction

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres (définitions en dimension finie ou infinie).

Polynôme caractéristique : $\chi_f(X) = \det(X \text{id} - f) = X^n - \text{tr}(f)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(f)$

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

Diagonalisation (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) d'un endomorphisme (en dimension finie), d'une matrice carrée.

Un endomorphisme f est diagonalisable ssi il existe une base de E formée de vecteurs propres de f
 ssi E est la somme directe des sous-espaces propres de f
 ssi $\dim E$ est égale à la somme des dimensions des sous-espaces propres de f
 ssi le polynôme caractéristique de f est scindé et chaque sous-espace propre est de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre associée.

Trigonalisation (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) d'un endomorphisme (en dimension finie), d'une matrice carrée.

Un endomorphisme f est trigonalisable ssi il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire
 ssi le polynôme caractéristique de f est scindé.

Application

Calcul des puissances d'une matrice.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ou 2 : $au_{n+1} + bu_n = 0$ ou $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.

Étude des suites récurrentes linéaires d'ordre $p \geq 3$ via l'écriture matricielle $U_{n+1} = AU_n$ lorsque la matrice A admet p valeurs propres distinctes.

Note. Sont hors-programme :

- la caractérisation de la diagonalisabilité par l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples ;
- le théorème de Cayley-Hamilton ;
- toute méthode générale de trigonalisation
 (toute question relative à une trigonalisation devra comporter une indication).

Réduction des endomorphismes et des matrices

Après avoir introduit le vocabulaire des éléments propres en dimension quelconque, cette partie s'intéresse de manière plus approfondie au cas de la dimension finie, et à la question de la diagonalisabilité d'une matrice carrée.

L'application des résultats de la réduction à la recherche des solutions d'une récurrence linéaire à coefficients constants crée un nouveau pont entre l'algèbre et l'analyse et anticipe l'étude des équations différentielles linéaires dont la résolution repose sur des outils similaires.

La notion de polynôme annulateur est hors programme. L'étude des classes de similitude est hors programme.

CONTENUS

CAPACITÉS ET COMMENTAIRES

a) Éléments propres

Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension quelconque.

Interprétation en termes de droite stable.

$\Leftrightarrow$ SI : matrice d'inductance, inductance cyclique, inductance homopolaire.

Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie. Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres.

Le polynôme caractéristique, défini par la fonction polynomiale $x \mapsto \chi_f(x) = \det(x \text{Id}_E - f)$ est de coefficient dominant égal à 1.

Spectre d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.

Notation $\text{Sp}(f)$, $\text{Sp}(A)$.

Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Il est supérieur ou égal à la dimension du sous-espace propre associé.

éléments propres et polynôme caractéristique d'une matrice.

Extension des définitions et des résultats précédents.

b) Endomorphismes et matrices diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Interprétation : existence d'une base de vecteurs propres.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E .

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Matrices diagonalisables.

Extension aux matrices des définitions et des résultats précédents relatifs aux endomorphismes.

$\Leftrightarrow$ SI : machines électriques.

c) Endomorphismes et matrices trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Démonstration hors programme. Aucune technique de trigonalisation effective n'est au programme.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est trigonalisable.

Expressions du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable en fonction de ses valeurs propres.

Matrices trigonalisables.

Extension aux matrices des définitions et des résultats précédents relatifs aux endomorphismes.

$\Leftrightarrow$ I : calcul de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux puissances itérées consécutives.

d) Applications

Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Structure de l'ensemble des suites numériques vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre p à coefficients constants. équation caractéristique.

Les étudiants doivent savoir transformer une récurrence scalaire d'ordre p en une récurrence vectorielle d'ordre 1 du type $X_{n+1} = AX_n$.

Les étudiants doivent savoir trouver une base de l'espace vectoriel des solutions dans le cas d'une relation d'ordre 2 et dans le cas d'une relation d'ordre p lorsque la matrice A possède p valeurs propres distinctes.