Semaine 10 : du 27 novembre au 01 décembre 2017

Semaine 11 : du 04 au 08 décembre 2017

Intégrales impropres

- Intégrales impropres du type : $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, $\int_{-\infty}^b f(x) dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, $\int_a^b f(x) dx$ avec problème(s) éventuel(s) en a et b (a et b étant des réels).

Généralisation à $\int_a^b f(x) dx$ avec $-\infty \leq a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b \leq +\infty$

et problèmes en $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Définition de la convergence, propriétés générales.

- Étude de la nature d'une intégrale impropre :
 - utilisation de primitives
 - intégrale faussement impropre (prolongement par continuité en une borne finie)
 - divergence de l'intégrale si limite non nulle en une borne infinie
 - changement de variable (bijectif, $\mathcal{C}^1$, strictement monotone)
 - la convergence de l'intégrale de $|f|$ entraîne la convergence de l'intégrale de f
 - critères de comparaison pour les fonctions positives (inégalité ou équivalent)
 - comparaison aux intégrales de référence : $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\int_0^1 \ln x dx$, $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$
 - « méthode du $x^\alpha f(x)$ »
 - intégration par parties
 - utilisation d'un développement asymptotique
- Fonctions intégrables sur un intervalle quelconque.

Définition. Propriétés.

- Intégrales à paramètres.

Continuité, dérivabilité (ou caractère $\mathcal{C}^1$) et dérivée de $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$.

On veillera à ce que l'élève sache citer précisément le théorème qu'il utilise.

Notes.

- Les notions de convergence absolue et semi-convergence ne sont pas au programme. Est seulement au programme le résultat suivant : $\int |f|$ converge $\Rightarrow \int f$ converge.
- L'utilisation de dominations locales pour démontrer la continuité ou dérivabilité globale d'une fonction définie par une intégrale à paramètre fera l'objet d'une question intermédiaire.
- Pour montrer qu'une fonction définie par une intégrale à paramètres est deux fois dérivable, on appliquera deux fois le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

Intégrales généralisées

L'objectif de ce chapitre est double :

- étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;
- définir, dans le cadre des fonctions continues, la notion de fonction intégrable.

Afin de ne pas alourdir le vocabulaire, la locution « intégrale absolument convergente » ne figure pas au programme. L'étude de la semi-convergence des intégrales n'est pas un objectif du programme.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

CONTENUS

CAPACITÉS ET COMMENTAIRES

a) Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

Pour $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $b > a$ ou $b = +\infty$, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures. Si

tel est le cas, on note cette limite $\int_a^b f(t) dt$.

Théorèmes de comparaison pour les fonctions continues et de signe constant sur $]a, b[$ sous les hypothèses $f \leq g$ ou $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$.

Adaptation aux fonctions définies sur un intervalle $]a, b[$, avec $a < b$ ou $a = -\infty$, puis sur un intervalle $]a, b[$.

Intégrales de référence :

$$\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt, \int_0^1 t^{-\alpha} dt.$$

Relation de Chasles.

Théorème de changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Il suffit de vérifier l'hypothèse $f \leq g$ au voisinage de b .

Les étudiants doivent connaître la nature de $\int_0^1 \ln(t) dt$ et de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ selon le signe de α .

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de $f'g'$ et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.

b) Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle

Une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite intégrable sur I si $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente, où $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.

Si f est intégrable sur I , $\int_I f(t) dt$ est convergente.

Linéarité, positivité et croissance de l'application $f \mapsto \int_I f(t) dt$.

Espace vectoriel des fonctions continues intégrables sur I .

Pour f continue et intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, inégalité

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt.$$

Si f est une fonction continue sur I telle que $\int_I |f(t)| dt = 0$, alors f est identiquement nulle sur I .

Théorème de comparaison pour les fonctions continues et intégrables sur $]a, b[$: si g est intégrable sur $]a, b[$ et si $f(t) = O(g(t))$, alors f est intégrable sur $]a, b[$.

Notation $\int_I f(t) dt$. L'intégrabilité sur I est équivalente à l'intégrabilité sur l'intérieur de I .

Utilisation des parties positive et négative, des parties réelle et imaginaire.

Il coïncide avec l'espace des fonctions continues si I est un segment.

Démonstration non exigible pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Les étudiants peuvent directement utiliser le théorème de comparaison sous l'hypothèse $f(t) = o(g(t))$.

Adaptation du théorème de comparaison aux fonctions définies sur un intervalle $]a, b[$.

Intégrales dépendant d'un paramètre

L'étude des intégrales dépendant d'un paramètre apporte un fondement mathématique à la transformée de Laplace utilisée en sciences de l'ingénieur. La vérification de l'hypothèse de domination permet de développer la compétence « Calculer ».

CONTENUS

CAPACITÉS ET COMMENTAIRES

a) Théorème de continuité

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I \times J$, telle que :

- pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur J ;
- pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ;
- il existe une fonction φ positive, continue et intégrable sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination).

Alors la fonction $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est continue sur I .

Démonstration hors programme.

Le passage éventuel par une domination locale doit faire l'objet d'une question intermédiaire.

Cas où J est un segment et où f est continue sur $I \times J$.

b) Théorème de dérivation

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I \times J$, telle que :

- pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur J ;
- pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur J ;
- il existe une fonction φ positive et intégrable sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

(hypothèse de domination).

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Démonstration hors programme.

Le passage éventuel par une domination locale doit faire l'objet d'une question intermédiaire.

Cas où J est un segment et où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times J$.

⇔ SI : exemples de transformées de Laplace.