PT	Programme de colles	2017/2018

Semaine 12 : du 11 au 15 décembre 2017
Semaine 13 : du 18 au 22 décembre 2017

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire sur un espace vectoriel réel.
Produit scalaire. Espace préhilbertien réel, espace euclidien.
Norme préhilbertienne. Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Inégalité triangulaire.
Identités de polarisation. Identité du parallélogramme.

Orthogonalité en dimension quelconque.
Orthogonalité de deux vecteurs. Théorème de Pythagore.
Familles orthogonales et orthonormées.
Sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace, supplémentaire orthogonal.

Existence de bases orthonormées, du supplémentaire orthogonal.
Existence de bases orthonormées en dimension finie.
Existence du supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.

Orthogonalité en dimension finie.
Si E est de dimension finie et F est un sous-espace de E, $F \oplus F^\perp = E$, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$, $(F^\perp)^\perp = F$.
Vecteur normal d'un hyperplan.
Matrice du produit scalaire dans une base. Expressions matricielles du produit scalaire et de la norme.
Calculs en base orthonormée (décomposition d'un vecteur, expressions du produit scalaire et de la norme).

Projections et symétries orthogonales.
Projection et symétrie orthogonale sur un sous-espace admettant un supplémentaire orthogonal.
Distance d'un vecteur à un tel sous-espace.
Cas particulier d'un sous-espace de dimension finie (expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée ou orthogonale).

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Notes.
- La notion général de norme est hors-programme. Seule la norme préhilbertienne a été vue.
- Les matrices orthogonales, les isométries vectorielles et la réduction des matrices symétriques réelles seront au prochain programme de colle.
- Les endomorphismes autoadjoints ne sont pas au programme de PT.
  La réduction des matrices symétriques réelles est au programme de PT, mais ne fait pas partie de ce programme de colle.

Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

Contenus	Capacités et commentaires
a) Produit scalaire et norme	
Produit scalaire.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$.
Espace préhilbertien réel, espace euclidien.	
Produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$.	On peut identifier $\mathbb{R}^n$ et l'espace des vecteurs colonnes correspondant.
Exemples de produits scalaires définis par une intégrale sur les espaces de fonctions et de polynômes.	
Norme préhilbertienne, distance associée.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	
Identité du parallélogramme, identité de polarisation.	
b) Orthogonalité en dimension quelconque	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux.	
Orthogonal d'un sous-espace vectoriel.	Notation $F^{\perp}$.
Théorème de Pythagore.	
Famille orthogonale, famille orthonormale (ou orthonormée).	
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.	
Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre l'algorithme dans le cas d'un nombre restreint de vecteurs. $\leftrightarrows$ I : calcul d'une base orthonormée de polynômes pour différents exemples de produit scalaire.
c) Bases orthonormales	
Existence de bases orthonormales en dimension finie.	
Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale ; expression du produit scalaire et de la norme.	$x_i = \langle e_i \| x\rangle$. $\leftrightarrows$ PC/SI.
Expression matricielle du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale.	Formules $\langle x, y\rangle = X^{\mathrm{T}} Y$, $\\|x\\|^2 = X^{\mathrm{T}} X$.
Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale.	Formule $a_{i,j} = \langle e_i \| f(e_j)\rangle$.
d) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.	
Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.	Les étudiants doivent savoir déterminer le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur x sur un sous-espace F en calculant son expression dans une base orthonormale de F ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de F. $\leftrightarrows$ I : programmation de ces méthodes.
Inégalité de Bessel.	
Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui minimise la distance de x à un vecteur de F.	
Distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel F de dimension finie.	Notation $d(x, F)$. Application à la recherche du minimum.