Semaine 14 : du 08 au 12 janvier 2018
Semaine 15 : du 15 au 19 janvier 2018

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Le cadre du chapitre est les espaces euclidiens.

Orientation.
Orientation d'un espace vectoriel. Base directe, base indirecte.
Automorphismes directs, indirects.
Orientation d'un hyperplan à l'aide d'un vecteur normal. Cas particulier de la dimension 3.

Groupe orthogonal.
Matrices orthogonales. Isométries vectorielles.
Description des isométries vectorielles directes et indirectes en dimensions 2 et 3.
Décomposition d'une isométrie vectorielle comme produit de réflexions.

Les étudiants doivent savoir déterminer, en dimensions 2 *et* 3*, la nature d'une isométrie vectorielle et ses éléments caractéristiques.*

Réduction des matrices symétriques réelles

Le polynôme caractéristique d'une matrice symétrique réelle est scindé sur $\mathbb{R}$.
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.
Réduction d'une matrice symétrique réelle dans le groupe orthogonal.

Notes.

- Les étudiants doivent savoir déterminer, en dimensions 2 et 3, la nature d'une isométrie vectorielle et ses éléments caractéristiques.
- Les endomorphismes symétriques et les formes quadratiques ne sont plus au programme.
- L'application de la diagonalisation des matrices symétriques réelles à la réduction des coniques et à l'étude des extrema locaux de fonctions de plusieurs variables sera vue ultérieurement.

Isométries d'un espace euclidien

CONTENUS	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Isométries vectorielles	
Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormale. Symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace. Réflexion.	
Groupe orthogonal d'un espace euclidien E.	Notation $O(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Si un sous-espace est stable par une isométrie vectorielle, son orthogonal l'est aussi.	
b) Matrices orthogonales	
Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $M^{\mathrm{T}}M = I_n$. Caractérisation à l'aide des colonnes ou des lignes de M.	
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormale de E, une base $\mathscr{B}$ de E est orthonormale si et seulement si la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ est orthogonale. Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est une isométrie vectorielle de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est orthogonale. Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle. Isométrie vectorielle positive, isométrie vectorielle négative.	
Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{SO}(E)$.
c) Description des isométries vectorielles des espaces euclidiens orientés de dimensions 2 et 3	
Orientation d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3. Base directe, base indirecte.	
Description des isométries vectorielles du plan et de l'espace à partir des éléments propres des matrices de $O(2)$ et de $O(3)$.	Les étudiants doivent savoir déterminer les caractéristiques géométriques d'une isométrie.
d) Matrices symétriques réelles	
Matrice symétrique réelle.	Notation $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. La notion d'endomorphisme symétrique est hors programme. ⇆ PC/SI : matrice d'inertie.
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.	
Pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que $D = P^{-1}AP$.	Démonstration hors programme.