PT	Programme de colles	2017/2018

Semaine 16 : du 22 au 26 janvier 2018
Semaine 17 : du 29 janvier au 02 février 2018

Séries numériques

- Définitions, convergence, propriétés générales.
- Produit de Cauchy de deux séries numériques.
- Convergence absolue, semi-convergence. La convergence absolue entraîne la convergence.
- Comparaison série / intégrale : si f est continue et monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ par la méthode des rectangles.

  Application à recherche d'équivalents des sommes partielles d'une série divergente ou des restes d'une série convergente.
- Séries de références : séries géométriques, séries de Riemann.
  Les séries de Bertrand sont hors-programme, néanmoins les élèves doivent savoir étudier la nature de séries du type $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ ou $\sum \frac{1}{n\ln n}$ en utilisant les méthodes décrites ci-dessous.
- Développement décimal d'un réel. Caractérisation des nombres rationnels par la périodicité de leur développement décimal à partir d'un certain rang.
- Étude de la nature d'une série :
  – condition nécessaire (mais non suffisante) de convergence : le terme général tend vers 0 ;
  – la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge ssi la suite (u_n) converge ;
  – critères de comparaison (inégalité ou équivalence) pour les séries à termes positifs ;
  – comparaison à une série de Riemann (méthode du $n^\alpha u_n$) ;
  – comparaison à une intégrale : si $f \in \mathscr{C}^0([n_0,+\infty[,\mathbb{R}_+)$ est décroissante, $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature ;
  – règle de D'Alembert ;
  – le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente, de somme le produit des sommes des deux séries ;
  – décomposition du terme général à l'aide de développements limités ou asymptotiques.
- Majoration du reste :
  – d'une série géométrique ;
  – d'une série $\sum u_n$ telle que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq k < 1$.

Notes : – les séries alternées ne sont plus au programme ;
– le programme de PT complète l'étude des séries vue en PTSI ; le programme de la colle porte bien sûr sur les deux programmes de PTSI et PT.

Séries numériques : programme de PTSI

L'étude des séries prolonge celle des suites. Elle permet de mettre en œuvre l'analyse asymptotique.

CONTENUS	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Généralités	
Série à termes réels ou complexes ; sommes partielles ; convergence ou divergence ; en cas de convergence, somme et restes.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Séries géométriques : sommes partielles, condition nécessaire et suffisante de convergence, somme en cas de convergence.	
Séries télescopiques : la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge ; calcul de la somme en cas de convergence	
b) Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Pour f continue et monotone, encadrement des sommes partielles de la série $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	Sur des exemples simples, application à l'étude asymptotique de sommes partielles.
Séries de Riemann.	
Si (u_n) et (v_n) sont positives et si, pour tout n, $u_n \leqslant v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$, et $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$	Adaptation au cas où l'inégalité $u_n \leqslant v_n$ n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang. Comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann.
Si (u_n) et (v_n) sont positives et si $u_n \sim v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ est équivalente à celle de $\sum u_n$.	

Séries numériques : programme de PT

Cette partie étend l'étude des séries à termes positifs vue en PTSI à celle des séries à termes réels et complexes, en introduisant la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes.
L'étude des séries semi convergentes n'est pas un objectif du programme et celle des séries alternées est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Compléments sur les séries à termes positifs	
Théorème de comparaison série-intégrale : si f est une fonction définie sur $[n_0,+\infty[$, positive, continue et décroissante, alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.	Exemples de calcul approché, de majoration et de recherche d'équivalents des sommes partielles d'une série divergente ou des restes d'une série convergente. Exemples d'accélération de la convergence.
Développement décimal d'un nombre réel.	Caractérisation des nombres rationnels par périodicité de leur développement décimal à partir d'un certain rang. Aucune démonstration n'est exigible. $\leftrightarrows$ I : représentation des nombres réels par des flottants.
b) Séries absolument convergentes	
Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes.	
La convergence absolue implique la convergence.	Utilisation des parties positive et négative, des parties réelle et imaginaire.
Inégalité triangulaire.	
Théorème de comparaison : si v_n est le terme général positif d'une série convergente et si $u_n = O(v_n)$, alors Σu_n converge absolument.	Les étudiants peuvent directement utiliser le théorème de comparaison sous l'hypothèse $u_n = o(v_n)$.
Règle de d'Alembert.	
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	Démonstration non exigible.