PT	Programme de colles	2017/2018

Semaine 18 : du 05 au 09 février 2018
Semaine 19 : du 12 au 16 février 2018

Courbes planes

1) Courbes paramétrées

- Courbe paramétrée, classe, support, point multiple.
- Point stationnaire, point régulier, point birégulier.
- Tangente en un point régulier, en un point stationnaire.
- Étude locale (en calculant les dérivées successives ou en effectuant un développement limité) : point ordinaire, d'inflexion, de rebroussement de 1ère ou 2ème espèce.
- Symétries, réduction du domaine d'étude.
- Branches infinies.

2) Propriétés métriques des courbes paramétrées

- Longueur d'un arc de courbe.
- Abscisse curviligne. Paramétrage par l'abscisse curviligne pour une courbe régulière.
- Repère de Frenet, courbure, rayon de courbure, centre de courbure, cercle de courbure.
- Utilisation d'une détermination angulaire du vecteur vitesse.

3) Enveloppe d'une famille de droites, développée

- Étant donnée une famille $(\mathscr{D}_t)_t$ de droites définies par $\mathscr{D}_t = A(t) + \mathbb{R}\cdot\vec{u}(t)$, on recherche son enveloppe sous la forme $t \mapsto M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ avec la condition que la tangente au point courant soit dirigée par $\vec{u}(t)$.
- Développée d'une courbe comme enveloppe de ses normales ou lieu de ses centres de courbure.

4) Courbes définies par une équation

- Classe d'une courbe implicite. Point régulier, point singulier.
- Théorème des fonctions implicites : paramétrisation locale par l'abscisse lorsque $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \neq 0$ et par l'ordonnée lorsque $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \neq 0$.
- Équation de la tangente en un point régulier.
- Exemple d'étude locale en un point régulier.

Notes : – les courbes définies par une équation polaire ne sont plus au programme ;

– la formule $c = \dfrac{\left[\frac{d\vec{M}}{dt}, \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}\right]}{\left\|\frac{d\vec{M}}{dt}\right\|^3}$ donnant la courbure en un point régulier n'est pas au programme ;

– la méthode de recherche de l'enveloppe d'une famille de droites par résolution du système formé par l'équation d'une droite et sa dérivée n'est plus au programme ;

– les développantes de courbes ne sont plus au programme.

Courbes paramétrées du plan

Le chapitre sur les fonctions vectorielles trouve une illustration naturelle dans l'étude des courbes paramétrées.
Il convient de mettre en évidence et en relation les différents modes de représentation des courbes du plan (paramétrage, équation cartésienne, cas d'un graphe), et de formaliser des notions géométriques (courbe paramétrée, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques.
La notion d'arc géométrique étant hors programme et l'utilisation des changements de paramétrage réduite à la paramétrisation par l'abscisse curviligne, on identifie les courbes paramétrées avec l'arc géométrique dont ils sont un représentant.
L'étude des propriétés métriques d'une courbe paramétrée et celle de l'enveloppe d'une famille de droites privilégient la vision géométrique plutôt que le recours à l'application de formules.
L'étude des courbes définies par une équation polaire est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
b) Fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$	
Formule de Taylor-Young. Interprétation cinématique.	Développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$. $\leftrightarrows$ PC,SI : vecteurs vitesse et accélération.
c) Courbes paramétrées du plan	
Courbe paramétrée par une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Une demi-tangente en un point est définie comme limite à droite ou à gauche des sécantes. Point régulier, courbe régulière. Tangente en un point régulier.	Notation $t \mapsto M(t)$.
étude locale en un point régulier ou stationnaire, tangente et position relative. Définition géométrique des points d'inflexion et de rebroussement.	Les étudiants doivent savoir utiliser des développements limités pour les études locales.
Branches infinies.	Les étudiants doivent savoir utiliser des développements asymptotiques pour étudier les branches infinies.
Support d'une courbe paramétrée. Construction à partir de tableaux de variations.	$\leftrightarrows$ I : tracé de courbes paramétrées.
d) Propriétés métriques d'une courbe plane	
Longueur d'une courbe paramétrée régulière. Abscisse curviligne, paramétrage par une abscisse curviligne.	
Repère de Frenet $(M;\overrightarrow{T},\overrightarrow{N})$, normale, formules de Frenet, courbure en un point régulier.	La courbure est définie par $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}=\gamma\overrightarrow{N}$.
Orientation d'une courbe.	L'orientation d'une courbe régulière peut se faire par le choix d'un vecteur unitaire dirigeant la tangente ou par celui d'un sens de parcours de la courbe. La formule donnant la courbure à partir du déterminant de la vitesse et de l'accélération est hors programme.
Théorème de relèvement : si $t \mapsto M(t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$, existence d'une fonction α de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\overrightarrow{T}(t)=\cos(\alpha(t))\vec{\imath}+\sin(\alpha(t))\vec{\jmath}$. Expression de la courbure $\gamma=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$. Rayon de courbure en un point birégulier. Centre de courbure. Cercle de courbure.	Démonstration hors programme.
e) Enveloppe d'une famille de droites. Développée.	
Enveloppe d'une famille de droites données par une représentation paramétrique $t \mapsto A(t)+\lambda\vec{u}(t)$ où A et $\vec{u}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$: on cherche une fonction λ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $t \mapsto A(t)+\lambda(t)\vec{u}(t)$ paramètre une courbe dont la tangente au point courant est dirigée par $\vec{u}(t)$. Développée d'une courbe régulière : ensemble des centres de courbure. Caractérisation comme enveloppe des normales.	L'objectif est de privilégier une vision géométrique de la notion d'enveloppe et du procédé permettant de l'obtenir. $\leftrightarrows$ I : tracé d'enveloppes.

Courbes implicites du plan

CONTENUS	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
d) Courbes du plan définies par une équation cartésienne	
Courbe du plan définie par une équation $f(x,y)=0$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Point régulier.	
équation de la tangente en un point régulier.	On admet l'existence d'un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$.
En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x,y)=\lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.	$\leftrightarrows$ PC : lignes équipotentielles et lignes de champ. $\leftrightarrows$ I : tracé de lignes de niveau.