PT	Programme de colles	2017/2018

Semaine 20 : du 19 au 23 février 2018
Semaine 21 : du 12 au 16 mars 2018

Séries entières

Rayon de convergence.
Lemme d'Abel, rayon de convergence, disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.
Détermination du rayon de convergence à l'aide de la règle de D'Alembert.
Rayon de convergence de la somme de deux série entières.
Rayon de convergence d'une série entière dérivée ou primitive.
Rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières.

Propriétés analytiques de la somme d'une série entière de la variable réelle.
(Tous les résultats de ce paragraphe sont admis.)
La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence.
Dérivation et primitivation terme à terme de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
Intégration terme à terme de la somme sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
Continuité de la somme en R (resp. $-R$) si la série entière converge pour $x = R$ (resp. $x = -R$).

Fonctions développables en série entière.
Développements en série entière classiques.
Recherche de solutions développables en série entière d'une équation différentielle.
Utilisation d'une équation différentielle pour montrer qu'une fonction est développable en série entière*.

Exemples d'applications des séries entières.
Exemples de sommation de séries entières. Cas particulier de $\sum P(n)x^n$ et $\sum \frac{P(n)}{n!}x^n$.
Exemple de fonction prolongeable par continuité en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Calcul exact de la somme d'une numérique.

Fonctions de la variable complexe.
Développements en série entière des fonctions élémentaires de la variable complexe :

$$\exp,\ \cos,\ \sin,\ \mathrm{ch},\ \mathrm{sh},\ x \mapsto \frac{1}{1-x},\ x \mapsto \ln(1+x),\ z \mapsto (1+z)^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{Z}).$$

* Le chapitre sur les équations différentielles linéaires sera vu ultérieurement.
J'ai néanmoins énoncé (en l'admettant pour l'ordre 2) le « théorème de Cauchy linéaire » (existence et unicité d'une solution définie sur I du problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2, résolue, à cœfficients et second membre continus sur I).

Séries entières

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière de variable complexe et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier les propriétés de sa somme en se limitant au cas d'une variable réelle ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

La théorie des séries entières sera appliquée au cas des séries génératrices dans le chapitre dédié aux variables aléatoires discrètes et à la recherche de solutions d'équations différentielles linéaires.

Contenus	Capacités et commentaires
a) Rayon de convergence	
Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\|z\| < \|z_0\|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence défini comme la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée.	Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\|z\| < R$ et diverge grossièrement si $\|z\| > R$. La formule $R = \lim \left\| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\|$ est hors programme.
Si $\|a_n\| \leqslant \|b_n\|$ à partir d'un certain rang, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n z^n$. Si $a_n \sim b_n$, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.	
Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert réel de convergence.	L'étude de la convergence au bord du disque ou de l'intervalle de convergence n'est pas un objectif du programme.
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.	Démonstration non exigible.
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Propriétés de la somme d'une série entière d'une variable réelle	
Fonction somme d'une série entière.	
Continuité de la fonction somme sur son intervalle ouvert de convergence.	Démonstration hors programme.
La somme de la série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence. Dérivation terme à terme.	Démonstration hors programme.
Relation entre les coefficients et les dérivées successives en 0.	
Intégration terme à terme sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	Démonstration hors programme.
c) Fonctions développables en série entière.	
Fonction développable en série entière au voisinage de 0.	Série de Taylor.
Unicité du développement en série entière.	
Développements usuels : $$\mathrm{e}^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \mathrm{ch}\, x,\ \mathrm{sh}\, x,\ \frac{1}{1-x},\ \ln(1+x),\ (1+x)^\alpha.$$	Les étudiants doivent savoir obtenir un développement en série entière à l'aide de différentes méthodes : étude de la série de Taylor, unicité de la solution à un problème de Cauchy linéaire, produit de Cauchy.
d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe.	
Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.	
Pour tout nombre complexe z, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et sa somme vaut $\exp(z)$.	L'exponentielle complexe a été définie en première année par $\mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$.
Exponentielle d'une somme.	